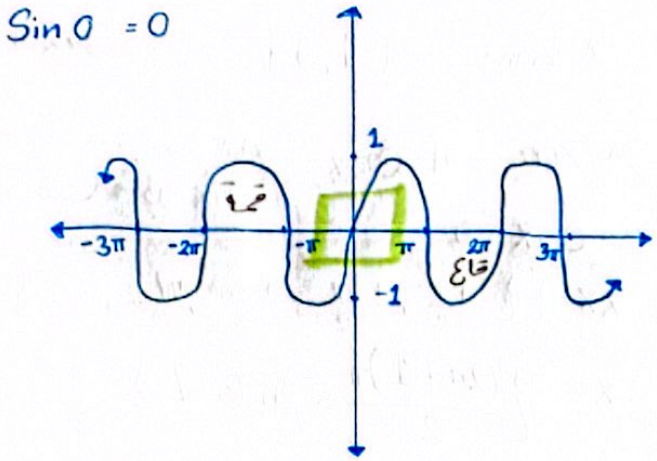
8 Trigonometric Functions : (المثلثيـــة)

1) Sin x (جيب الزاويـة)



* Sin x is odd (فردي) function
  ↳ Sin (-x) = - Sinx
* Domain (المجال) = $(-\infty, +\infty)$ R
* Range (المدى) = $[-1, +1]$, $-1 \leq \sin x \leq +1$
* Zero's of Sinx (اصفار Sinx) وهي القيم التي تقطع محور x

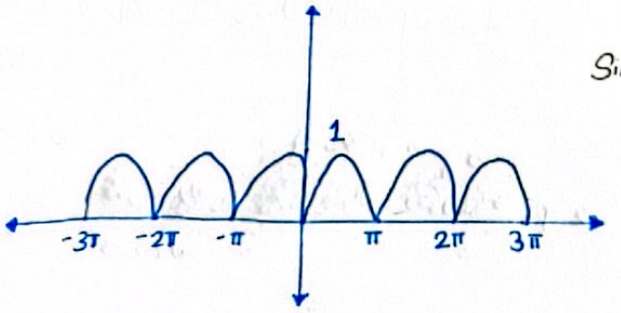
$\sin x = 0$

$x = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \dots\}$

$\rightarrow x = \{n\pi , n \in Z\}$

* n تنتمي لمجموعة الاعداد الصحيحة Z *
* حين تعدهذه القيم تكون قيمة Sin x تساوي الصفر.

* $0 \leq \sin^2 x \leq 1$
  $|\sin x| \leq 1$



* لاحظ ان بيان Sinx تختلف تمامًا عن بيان $\sin x^2$ أو $|\sin x|$ وذلك لأن التربيع والمطلق يلغي السالب لذلك تكون بيانهم عبارة عن قمم فقط على عكس بيان Sinx التي تكون عبارة عن قمم و قيعان.

* ويكون المجال نفسه لكلا من Sinx و $\sin^2 x$ و $|\sin x|$ ولكن ما يختلف هو المدى حيث يكون مدى $\sin^2 x$ و $|\sin x|$ هو من الصفر إلى الواحد

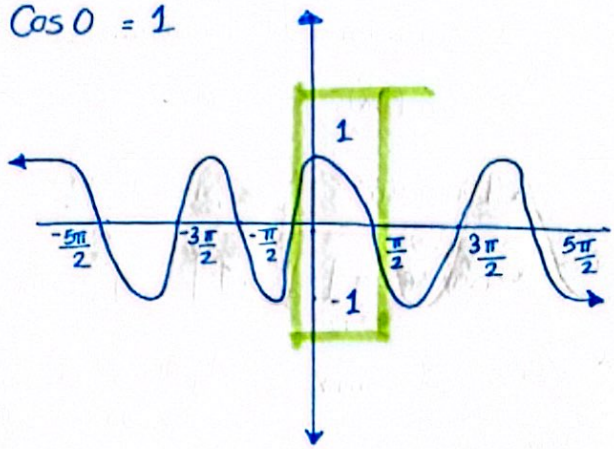
Domain = $(-\infty, +\infty)$ R

Range = $[0, 1]$,

Scanned with CamScanner

2) Cos x (جيب تمام الزاوية)

* Cos 0 = 1



* Cos x is even function
  Cos (-x) = Cos x

* Domain = $(-\infty, +\infty)$ R

* Range = $[-1, 1]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

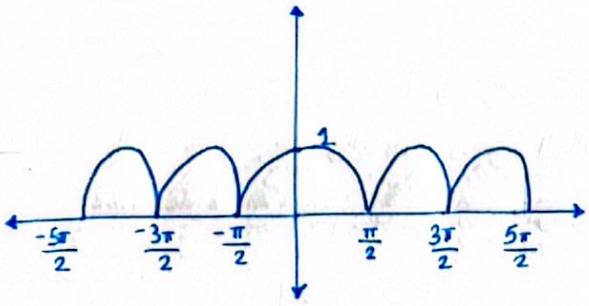
* Zero's of Cos x : اصفار الـ Cos x هي النقاط التي تقطع محور x

$\cos x = 0$

$x = \{\ldots, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots\}$

$x = \{\frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in Z\}$

* $0 \leq \cos^2 x \leq 1$
  $|\cos x| \leq 1$



Domain = R $(-\infty, +\infty)$

Range = $[0, 1]$

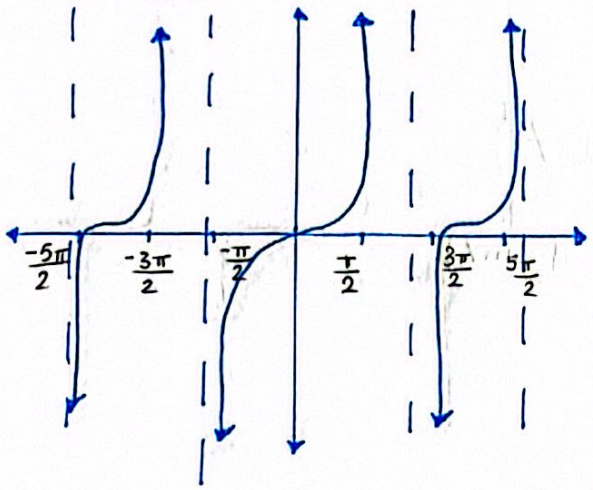
تكون رسمة Cos x مختلفة عن رسمة $\cos^2 x$ و $|\cos x|$ وذلك لانهما يخفيان السالب

فتكون رسمة $\cos^2 x$ و $|\cos x|$ فم فقط على عكس رسمة Cos x التي تكون فم و ضيعانة

Scanned with CamScanner

3) $\tan x$ (ظل الزاوية)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



* تكون رسمة $\tan x$ على شكل خطوط تقاربية

* $\tan x$ is odd function

$\tan(-x) = -\tan x$

* Domain = R - { zeros of $\cos x$ } عين معرف عندها

$D_{\tan x} = R - \left\{ \frac{\pm\pi}{2}, \frac{\pm 3\pi}{2}, \frac{\pm 5\pi}{2}, \dots \right\}$

* Range = $(-\infty, +\infty)$

---

4) $\cot x$ [redacted] (ظل التمام)

$$\cot x = \frac{1^{\text{even}}}{\tan x_{\text{odd}}} = \frac{\cos x^{\text{even}}}{\sin x_{\text{odd}}}$$

* $\cot x$ هو مقلوب $\tan x$

* مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا اصفار $\sin x$ ما عدا R

* $\cot x$ is odd function

* Domain $\cot x$ = R - [zeros of $\sin x$]

$D_{\cot x} = R - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$

* Domain $\cot x = R - \{n\pi, n \in Z\}$

Scanned with CamScanner

5) csc x (قاطع التمام)

* csc x هو مقلوب sin x

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$ (even / odd)

* مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ماعدا اصفار sin x

csc x is odd function

Domain csc x = $R - \{n\pi , n \in Z\}$

↓

(zero's of sin x)

6) sec x (القاطع)

* sec x هو مقلوب cos x

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$ (even / even)

* مجاله هو R مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا اصفار cos x

sec x is even function

Domain sec x = $R - \{\frac{(2n+1)\pi}{2} , n \in Z\}$

↓

Zero's of cos x

Scanned with CamScanner

Example :- Determine the folbwing functions

(even , odd , neither)

1) $f(x) = x^2 \sin x$ = even * odd = odd function

2) $f(x) = \tan^5 x = (\tan x)^5 = (odd)^5$ = odd function

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 + x} = \dfrac{odd}{odd + odd} = \dfrac{odd}{odd}$ = odd functions

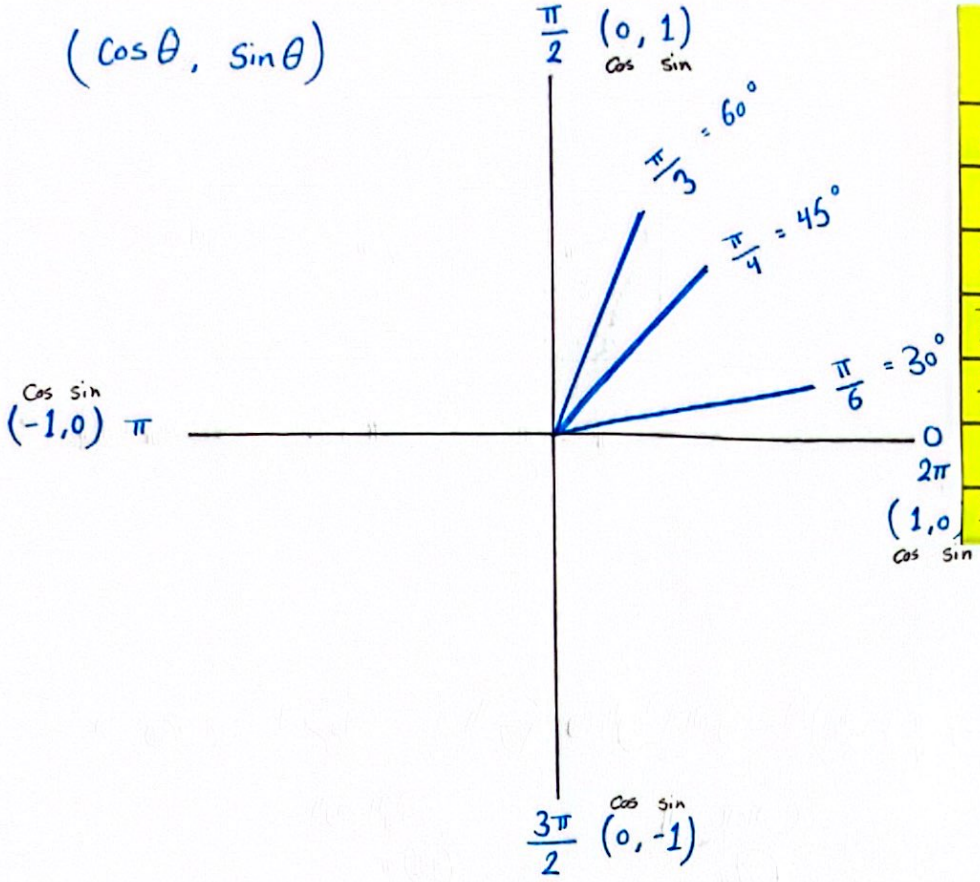
4) $f(x) = \dfrac{\overset{even}{\sec x}}{\tan x + x^5} = \dfrac{even}{odd + odd} = \dfrac{even}{odd}$ = odd function

- zip -

$\dfrac{1}{\cos x}$ even = even

Scanned with CamScanner

$(\cos\theta, \sin\theta)$



θ	Sinθ	Cosθ	tanθ
360° 0, 2π	0	1	0
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	1	0	not defiend
$\pi = 180°$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2} = 270°$	-1	0	not defiend

الربع الثاني Students	All الربع الأول
Sinθ +	Sinθ +
Cosθ −	Cosθ +
tanθ −	tanθ +
الربع الثالث Take	**الربع الرابع** Calculus
Sinθ −	Sinθ −
Cosθ −	Cosθ +
tanθ +	tanθ −

الربع الثاني	الربع الأول
$180 - \theta$ $\pi - \theta$	θ
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\pi + \theta$ $180 + \pi$	$2\pi - \theta$ $360 - \theta$

* This page is verey important *

Scanned with CamScanner

$\pi - \theta$	θ
$\sin\theta$ +	$\sin\theta$ +
$\cos\theta$ −	$\cos\theta$ +
$\tan\theta$ −	$\tan\theta$ +
$\sin\theta$ −	$\sin\theta$ −
$\cos\theta$ −	$\cos\theta$ +
$\tan\theta$ +	$\tan\theta$ −
$\pi + \theta$	$2\pi - \theta$

الربع الاول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
	$\pi - \frac{\pi}{6}$	$\pi + \frac{\pi}{6}$	$2\pi - \frac{\pi}{6}$

* توضيح :- لمعرفة كيفية التحكم بين الزوايا المرجعية $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ بين الاربعاع

مثال * $\frac{\pi}{6}$ الربع الاول

$\rightarrow \frac{5\pi}{6}$ الربع الثاني

معامل البسط اقل من المقام بواحد

$\rightarrow \frac{7\pi}{6}$ الربع الثالث

معامل البسط اكبر من المقام بواحد

$\rightarrow \frac{11\pi}{6}$ الربع الرابع

معامل البسط هو ضعف المقام ناقصا واحد

Scanned with CamScanner

* Evaluate :-

1) $\csc \frac{\pi}{6}$ 30°

$$\csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2) $\sec^2 \frac{\pi}{4}$ 45°

* في هذا المثال سنقوم بترييح خانة sec

$$\sec^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

3) $\cot \frac{\pi}{3}$ 60°

$$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) $\sin \frac{7\pi}{6}$

* في هذا المثال الزاوية ليست من الزوايا المرجعية

لاحظ ان معامل البسط اكبر من المقام بواحد

← ربع ثالثا ← sin في الربع الثالث سالب

* وبما يكافئها من زوايا مرجعية هي $\frac{\pi}{6}$

حيث sin لها هو $\frac{1}{2}$

* وبما ان الزاوية الاساسية في الربع الثالث

تكون $\frac{-1}{2}$

الاجابة $\sin \frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

Scanned with CamScanner

* المثال المجاور الزاوية ليست زاوية مرجعية

* لمعرفة هي في اي ربع لاحظ معامل البسط اقل من المقام بواحد ← ربع ثاني

* Sin في الربع الثاني موجبة

* مكافئتها من الزوايا المرجعية هي $\frac{\pi}{6}$

* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

* في الربع الثاني $+\frac{1}{2}$

5) $\sin\frac{5\pi}{6}$

ربع ثاني

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ربع ثالث

6) $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

* الـ Cos في الربع الثالث سالبة

ربع ثالث

7) $\tan\frac{4\pi}{3} = +\sqrt{3}$

ربع ثاني

8) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ربع رابع

9) $\cos\frac{11\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

* معامل البسط ضعف المقام - 1 ← الربع الرابع

* Cos موجبة في الربع الرابع

* مكافئتها هي $\frac{\pi}{6}$ حيث $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanned with CamScanner

* Solve the following Trigonometric Equations :-

1) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6}$

وتكون sin تساوي $\frac{1}{2}$ عند الزاوية $\frac{\pi}{6}$ الربع الأول
والزاوية $\frac{5\pi}{6}$ الربع الثاني

2) $\sin(3x) = 0$, $[0, 2\pi]$

$\frac{3}{3}x = \frac{0}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}$

$x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

3) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $[0, 2\pi]$

عندما يكون sinx سالب
تكون في الربعين الثالث والرابع

$x = \frac{7\pi}{6} , \frac{11\pi}{6}$

Scanned with CamScanner

4) $\sin x - \cos x = 0$ $\quad \{0, 2\pi\}$

$+\cos x \qquad +\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

* كل المعادلة المثلثية المجاورة نرتب الحدود

ومن ثم نقسم الطرفين على $\cos x$

* حيث هنا اصبح شكل المعادلة النهائي

$$\tan x = 1$$

* وتكون $\tan x$ موجبة في كل من الربعين الأول والثالث

ونسأل الواحد عن الزاويتين $\frac{\pi}{4}$ (الأول) ، $\frac{5\pi}{4}$ (الثالث)

5) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ $\quad \{0, 2\pi\}$

$+\sin x \qquad +\sin x$

$$\sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \tan x$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

تكون $\tan x$ موجبة في الربعين الأول والثالث

ونسأل $\sqrt{3}$ عن الزاويتين $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

Scanned with CamScanner

* Trigonometric Identities (المتطابقات)

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow$ $\boxed{1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$

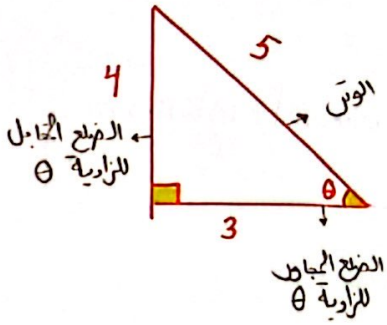
3) $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ $\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x}$

4) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

5) $\cos 2x = ① \cos^2 x - \sin^2 x$

② $2\cos^2 x - 1$

③ $1 - 2\sin^2 x$



6) $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

7) $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

8) $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

9) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$

10) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

11) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$

Scanned with CamScanner