Lecture 4
22 oct 2024

* 3 Root Functions الاقتران الجذري

General Form $\rightarrow$ $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

n is even زوجي $\left(\sqrt[2]{\quad} \right)$

The Domine is all values that make $\boxed{g(x) \geq 0}$

* إذا كان الاقتران الجذري زوجي فإن مجاله هو جميع القيم التي تجعل الاقتران تحت الجذر اكبر او يساوي الصفر (جميع القيم الموجبة)

* $D_{f(x)} \{ x : g(x) \geq 0 \}$

n is Odd فردي $\left(\sqrt[3]{\quad} \right)$

The Domine of $f(x)$ equal the Domine of $g(x)$

* إذا كان الاقتران الجذري فردي فإن مجاله هو مجال الاقتران داخل الجذر

* فإذا كان الاقتران الجذري الفردي ما تحته هو اقتران كثير حدود فإن مجاله هو مجال كثير الحدود

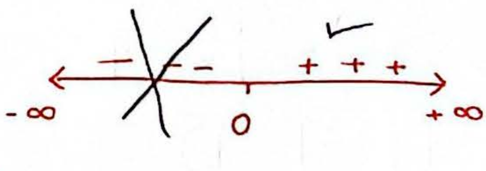
* وإذا " " " " " " نسبي " " " " الاقتران النسبي

Example : Find the domine of the following functions :-

1) $f(x) = \sqrt[2]{x}$

the domine $\rightarrow$ $x \geq 0$

$D_{f(x)} = [0, +\infty)$



* دائماً مجاله بالفترة الموجبة

2) $f(x) = \sqrt[4]{x-3}$ even

the domine → $x - 3 \geq 0$ → $x \geq 3$
$+3 \quad +3$

مغلق لوجود المساواة

$D_{f(x)} = \boxed{[}3, +\infty)$

3) $f(x) = \sqrt[2]{6-2x}$ even

the domine → $6 - 2x \geq 0$ → $\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-6}{-2}$
$-6 \qquad -6$

$x \leq 3$

عند القسمة أو الضرب بسالب تُعكس إشارة المتباينة

$D_{f(x)} = (-\infty, 3]$

4) $f(x) = \sqrt[8]{x+1}$ even

the domine → $x+1 \geq 0$ → $x \geq -1$
$-1 \qquad -1$

$D_{f(x)} = [-1, +\infty)$

فرق بين مربعين

لوجود عبارة تربيعية داخل الاقتران الجذري الزوجي عند ايجاد مجاله نساوي ما تحت الجذر بالصفر

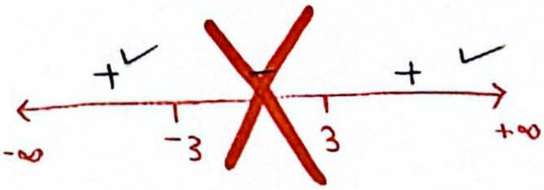
5) $f(x) = \sqrt[2]{x^2-9}$ even

the domine → $x^2 - 9 = 0$
$+9 \qquad +9$

$|\sqrt{x^2}| = \sqrt{9}$

$\boxed{x = \pm 3}$

* أو باستخدام خصائص القيمة المطلقة



$D_{f(x)} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

* ندرس إشارة الفترات على خط الأعداد بأخذ قيم وتعويضها بالاقتران الأصلي

أو بطريقة (نفس، عكس) من اليمين لليسار المعتمد على إشارة معامل x^2

طريقة أخرى $\rightarrow f(x) = \sqrt[2]{x^2-9}$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &\geq 0 \\ +9 \quad &+9 \end{aligned} \rightarrow |\sqrt{x^2}| \geq \sqrt{9} \rightarrow \boxed{|x| = 3}$$

$x \geq 3$ or $x \leq -3$ إحدى خصائص القيمة المطلقة!

$$D_{f(x)} = [3, +\infty) \cup (-\infty, -3]$$

*عند ايجاد المجال يمنع الاختصار والتبسيط

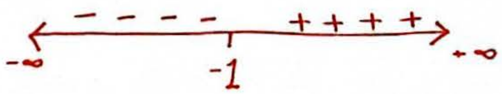
6) $f(x) = \sqrt[2]{\dfrac{x+1}{x+4}}$

* ما داخل الجذر هو اقتران نسبي لذلك نتعامل معه على انه اقتران نسبي نجد اصفار المقام

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ -4 \quad &-4 \end{aligned} \qquad \boxed{x = -4}$$

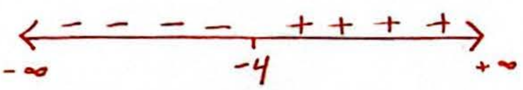
* يجب ان يكون ما داخل الجذر موجبا (حشو الجذر يجب ان يكون موجبا)

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \\ -1 \quad &-1 \end{aligned} \qquad \boxed{x = -1}$$



* وليكون الكسر موجبا يجب ان يكون كلا من البسط والمقام موجبين $\frac{+}{+} = +$

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ -4 \quad &-4 \end{aligned} \qquad \boxed{x = -4}$$



* او ان يكون كلا من البسط والمقام سالبين $\frac{-}{-} = +$

* ولمعرفة أو دراسة كسر داخل جذر نقوم بدراسة إشارة البسط لوحده ثم نقوم بدراسة إشارة المقام لوحده

$\dfrac{x+1}{x+4}$

* ولمعرفة المجال نقوم بدراسة بخط لوحده مع وضع جميع القيم عليه وندرس إشارته

$f(0) = \sqrt{\dfrac{0+1}{0+4}} = (+)\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

$f(-2) = \sqrt{\dfrac{-2+1}{-2+4}} = (-)\sqrt{\dfrac{-1}{2}}$

$f(-5) = \sqrt{\dfrac{-5+1}{-5+4}} = (+)\sqrt{\dfrac{-4}{-1}}$

$D_{f(x)}$

$(-\infty, 4) \cup [-1, \infty)$

صفر مقام

7) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$

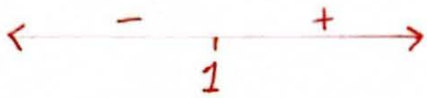
$x^2 - 1 = 0$
$\quad +1 \quad +1$

$|\sqrt{x^2}| = \sqrt{1}$

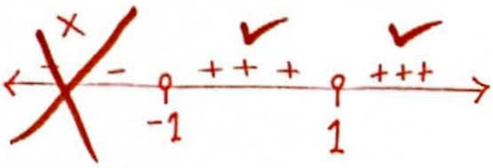
$\boxed{x = \pm 1}$

$x - 1 = 0$
$+1 \quad +1$

$x = 1$



$\frac{x-1}{x^2-1}$



$f(0) = \sqrt{\frac{0-1}{0^2-1}} = + \sqrt{\frac{-1}{-1}}$

$f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{4-1}} = + \sqrt{\frac{1}{4}}$

$f(-2) = \sqrt{\frac{-2-1}{4-1}} = - \sqrt{\frac{-3}{3}}$

$D_{f(x)}$

$(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}$ (odd)

بما ان الاقتران الجذري فردي الرمز
فإن مجاله هو مجال ما داخله
وبما ان ما داخله كثير حدود
فإذاً مجاله هو مجال كثير الحدود

$D_{f(x)} = R$

9) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$ (odd)

بما ان الاقتران الجذري فردي الرمز
فإن مجاله هو مجال ما داخله
وبما ان ما داخله اقتران نسبي
فإن مجاله هو مجال الاقتران النسبي

$x - 2 = 0$
$+2 \quad +2$
$\boxed{x = 2}$

$D_{f(x)} = R - \{2\}$

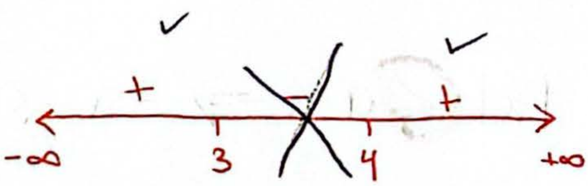
9) $f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 7x + 12}$ (even)

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$x - 3 = 0 \quad | \quad x - 4 = 0$

$\boxed{x = 3} \quad | \quad \boxed{x = 4}$



$D_{f(x)} = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$

$\boxed{4}$ Absolute Value Function اقتران القيمة المطلقة

properties خصائصها (مهمة)

1) $|x.y| = |x|.|y|$ امكانية توزيع المطلق في حالة الضرب

2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$ امكانية توزيع المطلق في حالة القسمة على البسط والمقام

3) $\sqrt{x^2} = |x|$

4) $|x| = a \rightarrow x = \pm a$

5) $|x| = |-x|$

*6) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq +a$, $[-a, a]$

$|x| < a \Rightarrow -a < x < +a$, $(-a, a)$

*7) $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$

$|x| > a \Rightarrow x > a$ or $x < -a$

* Examples : Solve

1) $|x| = 4$

$$\boxed{x = \pm 4}$$

2) $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$|x| = 3$

$$\boxed{x = \pm 3}$$

3) $|2x - 1| = 3$

$2x - 1 = 3$

$\quad +1 \quad +1$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$$\boxed{x = 2}$$

$2x - 1 = -3$

$\quad +1 \quad +1$

$\frac{2x}{2} = \frac{-2}{2}$

$$\boxed{x = -1}$$

4) $|1 - 7x| + 1 = 3$

$\qquad -1 \quad -1$

$|1 - 7x| = 2$

$1 - 7x = 2$

$-1 \qquad -1$

$\frac{-7x}{-7} = \frac{1}{-7}$

$$\boxed{x = -\frac{1}{7}}$$

$1 - 7x = -2$

$-1 \qquad -1$

$\frac{-7x}{-7} = \frac{-3}{-7}$

$$\boxed{x = \frac{3}{7}}$$

5) $|x| < 4$

$-4 < x < 4$

$(-4, 4)$

6) $|x| \geq 3$

$x \geq 3$ or $x \leq -3$

$[3, +\infty) \cup (-\infty, -3]$

note :- $|x| \neq -a$

في هذا الحالة لا يوجد لها حل

$\{\ \} = \emptyset$

لانه لا يوجد قيمة مطلقة تعطي سالب

* Find the domine for the following function :-

1) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-7}$

لاقتران المجاور هو اقتران نسبي
مجاله هو جميع مجموعة الأعداد
الحقيقية ما عدا اصفار المقام

لإيجاد اصفار المقام نساوي
المقام بالصفر

$$|x| - 7 = 0$$
$$\quad +7 \qquad +7$$

$$|x| = 7$$

$\boxed{x = \pm 7} \rightarrow$ اصفار المقام

توضيح :-

$|x| = a$, a: عدد

$$\boxed{x = \pm a}$$

$$D_{f(x)} = R - \{-7, +7\}$$

2) $f(x) = \sqrt[\overset{even}{2}]{|x|-2}$

الاقتران المجاور يمثل اقتران جذري
زوجي مجاله هو ان نجعل ما داخله
اكبر أو يساوي الصفر

$$|x| - 2 \geq 0$$
$$\quad +2 \qquad +2$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \text{ or } x \geq +2$$

توضيح :-

$|x| \geq a$, a: عدد

$x \leq -a$ or $x \geq +a$

[لا نقوم بعمل حصر]

$$D_{f(x)} = (-\infty, -2] \overset{\text{اتحاد}}{\cup} [+2, +\infty)$$

3) $f(x) = \sqrt[\text{even } ②]{3-|x|}$

$$3-|x| \geq 0$$

$$-3 \qquad\qquad -3$$

$$\frac{-|x|}{-1} \geq \frac{-3}{-1}$$

$$|x| \leq 3$$

$$-3 \leq x \leq +3$$

$$D_{f(x)} = [-3, +3]$$

توضيح :-

عدد a ، a , $x \leq a$

$-a \leq x \leq +a$

[نقوم بحل حصر]

حوّل   متشعب

* Convert the Absolute Value to piecewise function :

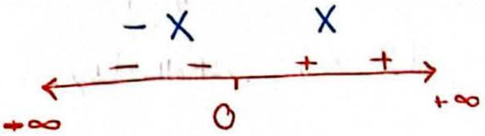
* المطلوب في هذا المثال هو إعادة تعريف المطلق وكتابته على صورة متشعب

[1] $|x|$

لإعادة تعريف المطلق وكتابته على صورة متشعب نساوي ما داخله بالصفر (1)

$x = 0$

ثم نضع القيمة على خط الأعداد لدراسة الإشارة (2)



نكتب القيم الناتجة من دراسة الإشارة على خط الأعداد داخل اقتران متشعب (3)

$$|x| = \begin{cases} x , & x \geq 0 \\ -x , & x < 0 \end{cases}$$

نضع مجال لكل اقتران داخل المتشعب حيث يتم تحديد المجال من خط الأعداد لكل اقتران حسب فترته (4)

تكون إشارة المساواة عند إشارة الأكبر والذي يمثل القيمة الموجبة للاقتران (*)

② $|2-x|$

$$|2-x| = 0$$
$$-2 \qquad -2$$
$$\frac{-x}{-1} = \frac{-2}{-1}$$
$$\boxed{x = 2}$$

$2-x$:

$-\infty$		2		$+\infty$
	$2-x$		$-(2-x)$	
	$+ + +$		$- - -$	

* القيم التي نأخذها حتى ندرس الاشارة على خط الاعداد نعوضها بالقاعدة $(2-x)$

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & , \ x < 2 \\ x-2 & , \ x \geq 2 \end{cases}$$

③ $|x-3|$

$$x-3 = 0$$
$$+3 \qquad +3$$

$x-3$:

$-\infty$		3		$+\infty$
	$-(x-3)$		$x-3$	
	$- - -$		$+ + +$	

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \ x \geq 3 \\ 3-x & , \ x < 3 \end{cases}$$

④ $|x^2-9|$

x^2-9:

$-\infty$		-3		3		$+\infty$
	x^2-9		$-(x^2-9)$		x^2-9	
	$+$		$-$		$+$	

$$x^2 - 9 = 0$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$
$$|x| = 3$$
$$\boxed{x = \pm 3}$$

$$|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9 & , \ x \geq 3 \\ 9-x^2 & , \ -3 < x < 3 \\ x^2-9 & , \ x \leq -3 \end{cases}$$