* IF $f(x)$ and $g(x)$ are two functions , Then

1] $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2] $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3] $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4] $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

* The Domain of $(f+g)$ and $(f-g)$ and $(f \cdot g)$ are always the Domain of (f) تقاطع $\boxed{\text{intersection}}$ the Domain of (g)

$\Rightarrow$ $D_f \overset{\text{تقاطع}}{\cap} D_g$

* مجال الاقترانات $(f+g)$ ، $(f-g)$. $(f \cdot g)$ يكون دائماً هو مجال الاقتران (f) تقاطع $(\cap)$ مجال الاقتران (g)

* The مجال Domain Of $\left(\frac{f}{g}\right)$ is دائماً always the domain(f) تقاطع intersection domain (g) ما عدا without the Zero's of المقام denominator (g)

$\Rightarrow$ $D_f \overset{\text{تقاطع}}{\cap} D_g - \{\text{Zero of}(g)\}$

* ويكون مجال الاقتران $\left(\frac{f}{g}\right)$ دائما هو مجال الاقتران (f) تقاطع مجال الاقتران (g) ما عدا اصفار الاقتران (g) (المقام)

Question : Find the domain of the following function :.

1) $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}$

لإيجاد مجال الاقتران المجاور

خذ مجال كل اقتران لوحده

من ثم تقاطع مجال الأول مع مجال الثاني

Domain $\overset{\text{even}}{\sqrt[2]{x-4}}$

$x - 4 \geq 0$

$+4 \quad\quad +4$

$x \geq 4$

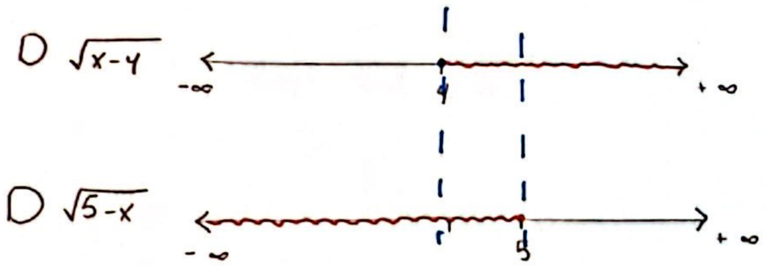
Domain $\overset{\text{even}}{\sqrt[2]{5-x}}$

$5 - x \geq 0$

$-5 \quad\quad -5$

$-x \geq -5$

$x \leq 5$



Domain of $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} \Rightarrow \boxed{[4, 5]}$

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

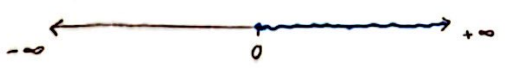
* Don't multiply

* ممنوع الاختصار و التبسيط

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

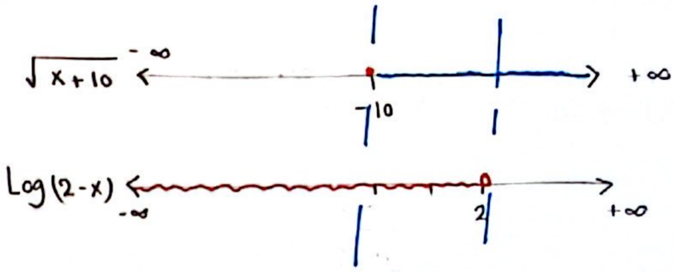
$= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

D $x \geq 0$ D $x \geq 0$



$D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$

Hed 3) $f(x) = \sqrt{x+10} - \text{Log}(2-x)$



$D \sqrt[2]{x+10}$ (even)

$x + 10 \geq 0$

$-10 \quad -10$

$x \geq -10$

$D \text{ Log}(2-x)$

$2 - x > 0$

$-2 \quad -2$

$-x > -2$

$x < 2$

$$D f(x) = [-10, 2)$$

4) $g(x) = \sin x + e^x$

$$D g(x) = R \cap R = R$$

* تذكر: مجال الاقتران المثلثي Sin هو جميع مجموعة الأعداد الحقيقية R

* مجال للاقتران الأسي الطبيعي هو جميع مجموعة الأعداد الحقيقية R

5) $f(x) = \dfrac{x-12}{x^2-36} + \log(x-5)$

اقتران نسبي مجاله هو R ماعدا اصفار المقام

$$D\ \frac{x-12}{x^2-36}$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$

$$|x| = 6$$

$$x = \pm 6$$

$$D\ \frac{x-12}{x^2-36} = R - \{-6, 6\}$$

$D \log(x-5)$

$$x - 5 > 0$$
$$+5 \quad +5$$

$$x > 5$$

$$D \log(x-5) = (5, +\infty)$$

عندما نقاطع R مع اي مجموعة كانت صغيرة يكون المجال الناتج هو المجموعة الصغيرة

$$D f(x) = (5, +\infty) - \{+6\}$$

يكون صفر المقام خارج الفترة $(5, \infty)$ لانه يقع على امتدادها

* بينما (-6) يستثنى لانه خارج الفترة $(5, \infty)$ ولا يقع على امتدادها

6) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

* عند مقاطعة المجالين نأخذ الناتج ذو الفترة مفتوحة الطرفين
* وذلك ليكون الصفر خارج المجال
* لأن ln إذا عوضنا داخله صفر يصبح قيمة غير معرفة لذلك يكون الصفر خارج المجال

$D\sqrt{x}$	$D\ln(x)$
$x \geq 0$	$x > 0$
$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$

$$Df(x) = [0, +\infty) \cap (0, +\infty)$$
$$= (0, +\infty)$$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$, $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g - \{\text{zero of } g\}$

$D\,\sqrt[2]{x-2}$ (even)	$D\ x-3 = R$ (polynomial)	zero of denominator $(x-3)$
$x-2 \geq 0$ $+2 \quad +2$	$(-\infty, +\infty)$	$x-3 = 0$ $+3 \quad +3$
$x \geq 2$		$x = 3$
$[2, +\infty)$		

$$Df(x) = [2, +\infty) - \{3\}$$

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$D\ \sqrt{x-2}$

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$[2, +\infty)$

$D(x-1)$

$\downarrow$

polynomial

كِلّا حدود

R

the Zero of denominator

$x - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$

$D_{f(x)} = [2, +\infty) \cap R - \{1\} \rightarrow$ يستثنى لأن الفترة الأساسية بتبدأ من 2

$* \ D_{f(x)} = [2, +\infty)$

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln x) - 3}$

$D\ \sqrt{x}$

$x \geq 0$

$[0, +\infty)$

$D\ (\ln x)$

$x > 0$

$(0, +\infty)$

Zero of denominater

$\ln x - 3 = 0$
$\quad\ \ +3 \quad +3$

$\ln x = 3$
$\ \ e \qquad\ \ e$

$x = e^3$

$D_{f(x)} = [0, +\infty) \cap (0, +\infty) - \{e^3\}$

$D_{f(x)} = (0, +\infty) - \{e^3\}$

10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x-3)}$

$D\sqrt{x}$

$x \geq 0$

$[0, +\infty)$

$D\ln(x-3)$

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$(3, \infty)$

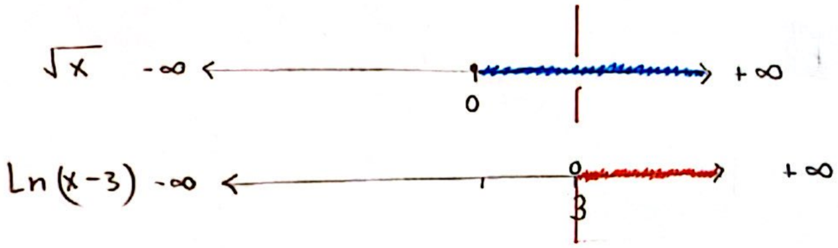
the zero of denominator

$\cancel{e}^{\cancel{\ln}(x-3)} = e^{0}$

$x - 3 = 1$
$\quad +3 \quad +3$

$x = 4$

* $\cancel{e}^{\cancel{\ln}} = 1$
* $e^{0} = 1$



$Df(x) = (3, +\infty) - \{4\}$

* Composition of functions
تركيب الاقترانات

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ → وتعني انا مكان كل (X) في الاقتران (f) نعوض قيمة الاقتران $(g(x))$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ → $(f(x))$ 〃 〃 〃 (g) 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

Example 1) If $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

Find

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$

Note :- $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

* Example 2) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $g(x) = 2x$, Find

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \dfrac{1}{2x-3}$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \dfrac{2}{x-3}$

Med Question :- $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

Find the value of x such that $f(g(x)) = g(f(x))$

Solution :-

$$* \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\rightarrow f(\ln x) = e^{2\ln x} = \cancel{e}^{\cancel{\ln} x^2} = x^2$$

$$* \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\rightarrow g(e^{2x}) = \cancel{\ln e}^{2x} = 2x$$

من السؤال ←

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

$$x^2 = 2x$$
$$-2x \qquad -2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

✗ $\boxed{x = 0}$ | $x - 2 = 0$

تستثنى من الحل | $\boxed{x = 2}$

has only one solution

Just $\boxed{x = 2}$

Question :- $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = 2x$ Find the value of x such that $f(g(x)) = g(f(x))$

$* \ (f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$f(2x) = \frac{1}{2x-3}$$

$* \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$g\left(\frac{1}{x-3}\right) = 2\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{2}{x-3}$$

من السؤال $\longrightarrow$ $f(g(x)) = g(f(x))$

$$\frac{1}{2x-3} \times \frac{2}{x-3}$$

$$2(2x-3) = 1(x-3)$$

$$4x - 6 = x - 3$$
$$-x \qquad -x$$

$$3x - 6 = -3$$
$$+6 \qquad +6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\boxed{x = 1}$$

* Question :- If $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, then

Find $((g \circ f)(1)) \Rightarrow$

Solution :- $g(f(1)) \cdot f(1) = \sqrt{(1)^2 + 4(1) - 1} = \sqrt{1 + 4 - 1}$

$\rightarrow \boxed{f(1) = 2}$

$$g(2) = \frac{2+1}{(2)^2+1} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

* في البداية اوجدنا $f(1)$ عن طريق تعويضها بالاقتران $f(x)$

حيث اصبحت قيمة $\boxed{f(1) = 2}$

من ثم نعوض 2 وهي قيمة $f(1)$ داخل الاقتران $g(x)$ ومن ثم نحصل على

الناتج $\frac{3}{5}$